Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. UPCT
Titulación: Grado en Ingeniería Química
Asignatura: Matemáticas I
Profesor: Francisco Periago Esparza. Email: f.periago@upct.es

HOJA DE PROBLEMAS: CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES I

1. Consideremos las coordenadas polares y su relación con las cartesianas, es decir,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\frac{y}{x}. \end{cases}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\theta.$$

Por otra parte, como $r = \frac{x}{\cos\theta}$, derivando en esta igualdad respecto a x se tiene

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos\theta}.$$

Llegamos entonces a la paradoja

$$\cos\theta = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos\theta}.$$

Explica dónde está el error en el razonamiento anterior.

2. Para un gas ideal se tiene que

$$V(n,p,T) = \frac{nRT}{p}.$$

Calcula el gradiente de V y su diferencial.

3. Calcula el gradiente y la matriz Hessiana de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \sin(x+y)\,e^{x-y}$, (b) $g(x,y,z) = xye^{yz}$, (c) $h(x,y,z) = \cos(x+2y+3z)$.

4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable dos veces y c una constante. Comprueba que la función $\phi(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x-ct)+f(x+ct)\right)$ es solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}.$$

Interpreta físicamente la solución $\phi(x,t)$.

5. La ecuación de Schrödinger para una partícula libre cuántica no relativista que se mueve en una dirección espacial viene dada por

quitar.

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^{\cancel{2}}}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t), \tag{1}$$

donde la llamada función de onda $\psi(x,t)$ es una función con valores complejos , es decir, $\psi(x,t)\in\mathbb{C}$, cuyo módulo al cuadrado es la función de densidad de probabilidad de la presencia de materia. Comprueba que la función

$$\psi(x,t) = Ae^{i(x-\omega t)},$$

con $\omega = \frac{\hbar}{2m}$ y A una constante, es solución de (1).

6. Comprueba que las funciones

$$T(x,t) = e^{-(n\pi\kappa)^2 t}\sin(n\pi x),$$

con $n\in\mathbb{N}$ y $\kappa>0$ son soluciones de la ecuación del calor

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Para cada x fijo, calcula $\lim_{t\to\infty} T(x,t)$ e interpreta físicamente el resultado.

7. La ecuación de Laplace (también llamada ecuación del potencial) bidimensional homogénea en coordenadas cartesianas es
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{2}$$
donde $u(x, y)$ es un campo escalar. Se pide:

   a) Comprueba que en coordenadas polares, es decir, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, la ecuación (2) se reescribe como
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \tag{3}$$

   b) Comprueba que las funciones
   $$u(r, \theta) = \left(a_n r^{n\pi} + b_n r^{-n\pi}\right)\sin(n\pi\theta),$$
   con $n \in \mathbb{N}$, y a_n, b_n constantes son solución de (3).

8. **Algunos operadores diferenciales para tensores.** De igual manera que se define el gradiente de un campo escalar, se define el gradiente de un campo vectorial que da como resultado la llamada matriz Jacobiana (que no es otra cosa sino que calcular el gradiente de cada una de las componentes de campo vectorial y colocarlas por filas). También se define la divergencia de un campo tensorial (matriz cuyas entradas son funciones escalares) haciendo la divergencia de cada una de las filas de la matriz y colocando el resultado como un vector. Veamos algunos ejemplos:

   a) Calcula el gradiente de los siguientes campos vectoriales
   $$\vec{F}(x, y) = \left(x^2 - y^2, xy\right), \quad \vec{G}(x, y, z) = \left(x^2y^2, e^{xyz}, \sin(x + yz)\right).$$

   b) Calcula la divergencia de los siguientes tensores
   $$I = \begin{pmatrix} m\left(y^2+z^2\right) & -mxy & -mxz \\ -mxy & m\left(x^2+z^2\right) & -myz \\ -mxz & -myz & m\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} xyz & y & x^2+z^2 \\ xy & 0 & 1 \\ x^2+y^2 & z^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   c) Calcula el gradiente y la divergencia del gradiente del siguiente campo vectorial ν ??
   $$\vec{u}(x, y, z) = \left(\frac{M}{2EI}\left(z^2 + \nu\left(x^2 - y^2\right)\right), \frac{\nu M}{2EI}xy, -\frac{M}{2EI}xz\right),$$
   M,
   donde ν, E, I son constantes.

   Nota: el tensor I anterior es el tensor de inercia de una partícula de masa m situada en la posición (x, y, z), y el campo $\vec{u}$ representa el vector de desplazamientos de una barra cilíndrica que está encastrada en uno de sus extremos y sobre la que actúa una densidad de cargas M en el otro extremo. E, I son parámetros que indican el tipo de material del cilindro.

9. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva. Calcula $\frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t))$. Aplica la fórmula obtenida para el caso concreto $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$.

10. Consideremos la relación $T = PV$. Calcula el producto
$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V,$$
donde el subíndice indica la variable que permanece constante durante la derivación correspondiente. *Nota:* obviamente estamos tentados a cancelar términos como si de fracciones se tratase para obtener como resultado final 1. Sin embargo, 1 no es el resultado correcto!.

Referencias

[1] E. Steiner, The Chemistry Maths book, Oxford University Press, 1996.

[2] G. Strang, Calculus, Wellesley- Cambridge Press, 1991.

HOJA DE PROBLEMAS. CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

(1) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ $\quad\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\frac{y}{x} \end{cases}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$$

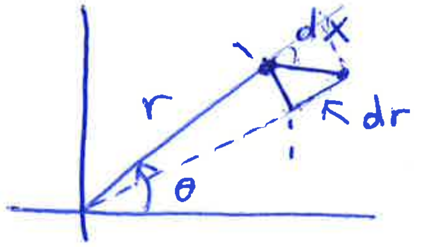
contradicción.

$$r = \frac{x}{\cos\theta} \rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos\theta}$$

El error en el razonamiento anterior es el siguiente:

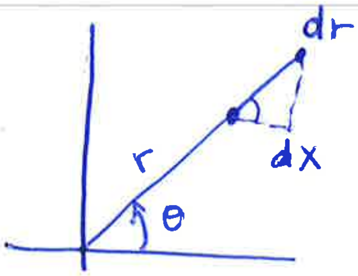
Cuando calculamos $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

la variable que permanece constante es "y". Gráficamente



$$dr = dx\cos\theta \rightarrow \frac{dr}{dx} = \cos\theta.$$

En cambio, cuando ponemos $r = \frac{x}{\cos\theta}$ y derivamos respecto a x, es "θ" la variable que permanece constante



$$\cos\theta = \frac{dx}{dr} \rightarrow dr = \frac{dx}{\cos\theta} \rightarrow \frac{dr}{dx} = \frac{1}{\cos\theta}$$

② $V(n,p,T) = \dfrac{nRT}{p}$

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial n}, \frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial T} \right) = \left(\frac{RT}{p}, -\frac{nRT}{p^2}, \frac{nR}{p} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{RT}{p} \; ; \quad \frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{nRT}{p^2} \; , \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{nR}{p}$$

La diferencial (total de Volumen) es una aplicación lineal

$$dV : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

cuya matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es el gradiente de V, ∇V. Se suele denotar

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_{p,T} dn + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{n,T} dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{n,p} dT$$

$$= \boxed{\frac{RT}{p}\, dn - \frac{nRT}{p^2}\, dp + \frac{nR}{p}\, dT \equiv dV}$$

③ a) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)\, e^{x-y}$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\cos(x+y)\, e^{x-y} + \operatorname{sen}(x+y)\, e^{x-y} ,\; \cos(x+y)\, e^{x-y} - \operatorname{sen}(x+y)\, e^{x-y} \right)$$

$$Hf = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y)e^{x-y} + \operatorname{sen}(x+y)e^{x-y} \;;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cancel{-\operatorname{sen}(x+y)e^{x-y}} + \cos(x+y)e^{x-y} + \cos(x+y)e^{x-y} \cancel{+\operatorname{sen}(x+y)e^{x-y}}$$

$$= 2\cos(x+y)e^{x-y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\operatorname{sen}(x+y)e^{x-y} \cancel{-\cos(x+y)e^{x-y}} \cancel{+\cos(x+y)e^{x-y}} - \operatorname{sen}(x+y)e^{x-y}$$

$$= -2\operatorname{sen}(x+y)e^{x-y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x+y)e^{x-y} - \operatorname{sen}(x+y)e^{x-y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \cancel{-\operatorname{sen}(x+y)e^{x-y}} - \cos(x+y)e^{x-y} - \cos(x+y)e^{x-y} \cancel{+\operatorname{sen}(x+y)e^{x-y}}$$

$$= -2\cos(x+y)e^{x-y}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cos(x+y)e^{x-y} & -2\operatorname{sen}(x+y)e^{x-y} \\ -2\operatorname{sen}(x+y)e^{x-y} & -2\cos(x+y)e^{x-y} \end{pmatrix}$$

(b) $g(x,y,z) = xye^{yz}$

$$\cancel{\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = (ye^{y}} =$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = ye^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = e^{yz} + yze^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = y^2 e^{yz}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = xe^{yz} + xyze^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = e^{yz} + yze^{yz} = (1+yz)e^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = xze^{yz} + xze^{yz} + xyz^2 e^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = xye^{yz} + xye^{yz} + xy^2 z e^{yz}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = xy^2 e^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} = y^2 e^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y} = 2xye^{yz} + xy^2 z e^{yz}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = xy^3 e^{yz}$$

$$\nabla g = \left(ye^{yz}, (x+xyz)e^{yz}, xy^2 e^{yz}\right)$$

$$Hg(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & (1+yz)e^{yz} & y^2 e^{yz} \\ (1+yz)e^{yz} & (2xz + xyz^2)e^{yz} & (2xy + xy^2 z)e^{yz} \\ y^2 e^{yz} & (2xy + xy^2 z)e^{yz} & xy^3 e^{yz} \end{pmatrix}$$

④ $\phi(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x-ct) + f(x+ct)\right)$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(f'(x-ct)\cdot(-c) + f'(x+ct)\cdot c\right)$$
$$= \frac{c}{2}\left(-f'(x-ct) + f'(x+ct)\right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{c}{2}\left(-f''(x-ct)\cdot(-c) + f''(x+ct)\cdot c\right)$$
$$= \frac{c^2}{2}\left(f''(x-ct) + f''(x+ct)\right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(f'(x-ct) + f'(x+ct)\right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(f''(x-ct) + f''(x+ct)\right)$$

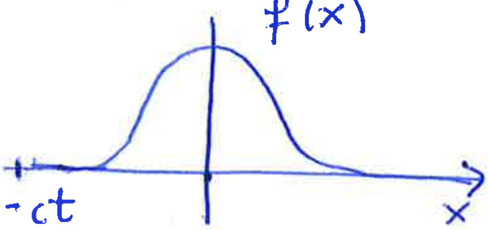
Por tanto, en efecto,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

Interpretación física de $\phi(x,t)$

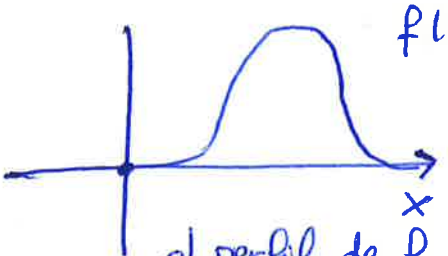
$t=0$

$f(x)$



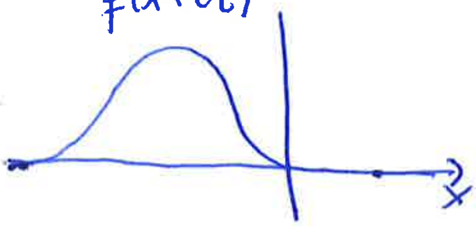
en tiempo t

$f(x-ct)$



el perfil de f se ha trasladado hacia la derecha a velocidad c

$f(x+ct)$

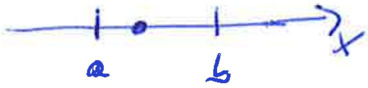


$\phi(x,t)$ es la suma de dos "ondas" o "perfiles" que se mueven a derecha e izquierda a velocidad c.

(5) Ecuación de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t)$$

$\psi(x,t) \in \mathbb{C}$



$\mathbb{P}\{$electrón esté en (a,b) en el instante $t\} =$

$$= \int_a^b |\psi(x,t)|^2 \, dx.$$

$$\psi(x,t) = A e^{i(x-\omega t)}, \quad \omega = \frac{\hbar}{2m}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -A i \omega e^{i(x-\omega t)} \Rightarrow i \frac{\partial \psi}{\partial t} = A \omega e^{i(x-\omega t)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = A i e^{i(x-\omega t)} \qquad \|$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -A e^{i(x-\omega t)}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = +A \frac{\hbar^{*}}{2m} e^{i(x-\omega t)} = A \omega e^{i(x-\omega t)}$$

(6) $T(x,t) = e^{-(n\pi k)^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x)$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(n\pi k)^2 e^{-(n\pi k)^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x) \rightarrow \frac{1}{k^2} \frac{\partial T}{\partial t} = -(n\pi)^2 e^{-(n\pi k)^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = n\pi e^{-(n\pi k)^2 t} \cos(n\pi x)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -(n\pi)^2 e^{-(n\pi k)^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x)$$

$$\lim_{t\to\infty} T(x,t) = \lim_{t\to\infty} e^{-(n\pi k)^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x) = 0$$

La temperatura $T(x,t)$ de cada punto x tiende a cero cuando $t\to\infty$. Es decir, la ecuación del calor por conducción $\frac{\partial T}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ es disipativa, la energía calórica se pierde rápidamente

(7) $u = u(x,y)$ campo escalar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

a) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ $\qquad u = u(x,y) = u(x(r,\theta), y(r,\theta))$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \cos\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$= \cos\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\operatorname{sen}\theta\right) + \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cos\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\operatorname{sen}\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -r\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\right) + r\left(-\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \cos\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\right)$$

$$= -r\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right) + r^2\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$+ - r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

Por tanto,

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \quad .$$

b) $$u(r,\theta) = \left(a_n r^{n\pi} + b_n r^{-n\pi}\right) \operatorname{sen}(n\pi\theta)$$

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial r} = a_n 2 (n\pi) r^{n\pi -}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(a_n \, n\pi r^{n\pi-1} - b_n \, n\pi r^{-n\pi-1}\right)\operatorname{sen}(n\pi\theta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \left(a_n (n\pi)(n\pi-1) r^{n\pi-2} + b_n (n\pi)(n\pi+1) r^{-n\pi-2}\right)\operatorname{sen}(n\pi\theta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = (\quad)\cos(n\pi\theta)\cdot n\pi$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -(n\pi)^2 (\quad)\operatorname{sen}(n\pi\theta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \left(a_n (n\pi)(n\pi-1) r^{n\pi-2} + b_n (n\pi)(n\pi+1) r^{-n\pi-2}\right)\operatorname{sen}(n\pi\theta)$$

$$- (n\pi)^2 \left(a_n r^{n\pi-2} + b_n r^{-n\pi-2}\right)\operatorname{sen}(n\pi\theta)$$

$$+ \left(a_n n\pi r^{n\pi-2} + b_n n\pi r^{-n\pi-2}\right)\operatorname{sen}(n\pi\theta)$$

$$= 0.$$

⑧ a) $$\vec{F}(x,y) = (\underbrace{x^2 - y^2}_{F_1}, \underbrace{xy}_{F_2})$$

$$\vec{\nabla}\vec{F}(x,y) = J\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \hline \nabla F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

b)

$$\nabla \cdot I = \Big(\frac{\partial}{\partial x}(m(y^2+z^2)) + \frac{\partial}{\partial y}(-mxy) + \frac{\partial}{\partial z}(-mxz),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-mxy) + \frac{\partial}{\partial y}(m(x^2+z^2)) + \frac{\partial}{\partial z}(-myz),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-mxz) + \frac{\partial}{\partial y}(-myz) + \frac{\partial}{\partial z}(m(x^2+y^2)) \Big)$$

$$= (-2mx, -2my, -2mz)$$

c)

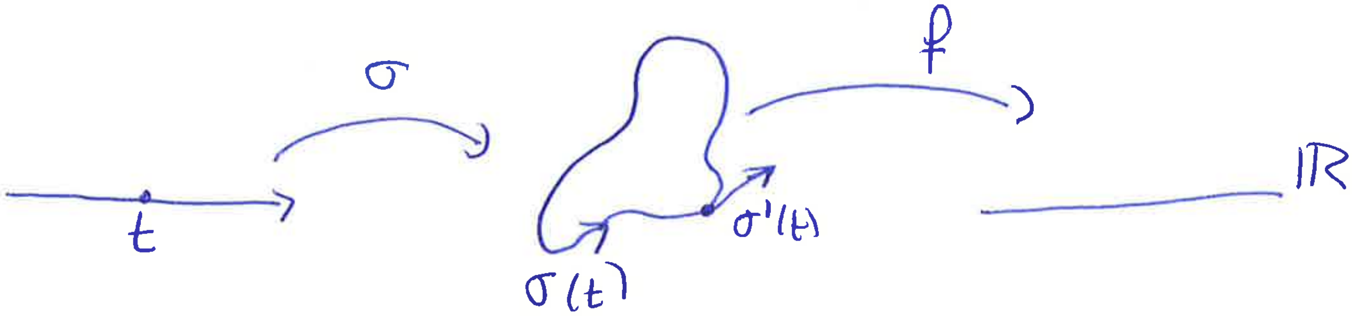
$$\nabla\vec{u} = J\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{M}{2EI} 2x\nu & -\frac{M}{2EI} 2y\nu & \frac{M}{2EI} 2z \\ \frac{\nu M}{2EI} y & \frac{\nu M}{2EI} x & 0 \\ -\frac{M}{2EI} z & 0 & -\frac{M}{2EI} x \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \nabla\vec{u} = \left(\frac{M}{2EI} 2\nu - \frac{M}{2EI} 2\nu + \frac{M\,2}{2EI}, 0, 0 \right)$$

$$= \left(\frac{M}{2EI}, 0, 0 \right).$$

(9) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$f(\sigma(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$$



$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

regla de la Cadena

$$= \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$$

$$\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$$

$$\sigma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$$

$$\nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 2) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$$

$$= -2\operatorname{sen} t \cos t + 2 \operatorname{sen} t \cos t, 0$$

$$= 0.$$

(10) $T = PV$; $P = \frac{T}{V}$; $V = \frac{T}{P}$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{T}{V^2} \ ; \ \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{P} \ ; \ \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = V$$

Por tanto,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -\frac{T}{V^2} \cdot \frac{1}{P} \cdot V = -\frac{PV}{VP} = -1$$